

CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2024-2025

Prova scritta in aula del 25.06.2025

Parte II - Testo 1

Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti.

Allievo:.....e-mail:..... Matricola:.....

Esercizio n. 1 (17 punti)

Risolvere mediante il Principio dei Lavori Virtuali (PLV) la struttura iperstatica riportata in Figura, assumendo, come incognita iperstatica, la reazione dell'appoggio in C, V_C .

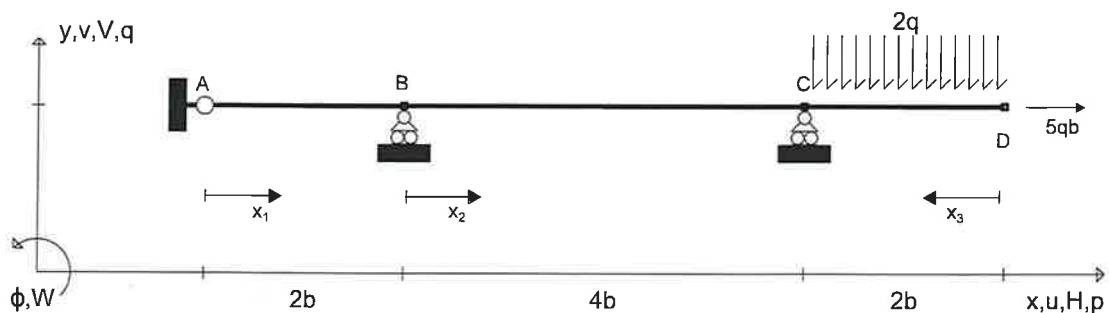
Dopo avere determinato l'iperstatica *tenendo conto solo della deformabilità flessionale*, calcolare le reazioni vincolari, le azioni interne e tracciare nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici.

Calcolare infine, riapplicando il PLV, la componente di spostamento verticale del punto D, v_D .

Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.

Universita' di Cagliari

SdC_SdA 2 25.06.25*001



EQUAZIONE DI GAVENENZA = $v_C(x, \varphi) = 0$

Esercizio n. 2 (7 punti)

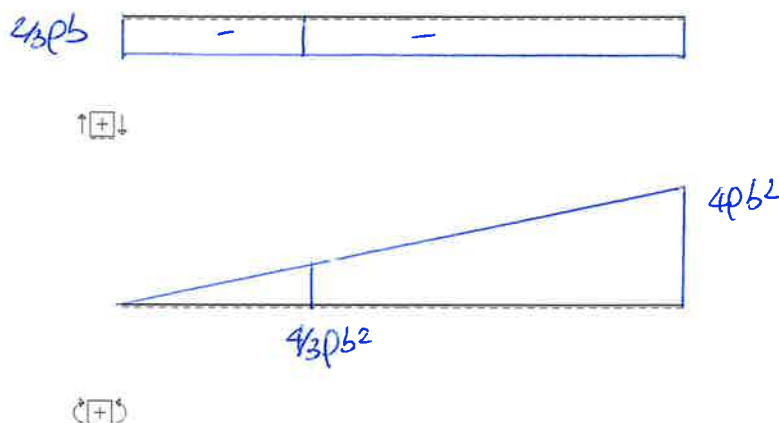
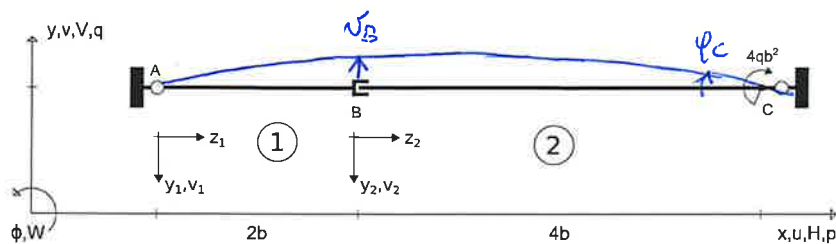
Per la struttura *isostatica*, indicata in Figura, determinare le reazioni vincolari e l'espressione delle azioni interne, nonché le condizioni al contorno imposte dai vincoli nei punti A, B e C.

Utilizzare quindi l'equazione della linea elastica per determinare:

1. La deformata della linea d'asse, $v(z) = v_1(z_1) \cup v_2(z_2)$;
2. La sua derivata prima, $v'(z) = v_1'(z_1) \cup v_2'(z_2)$;
3. La rotazione del punto C, φ_C ;
4. Lo spostamento verticale del punto B, v_B .

Università di Cagliari

SdC_SdA_2 26.06.25*001



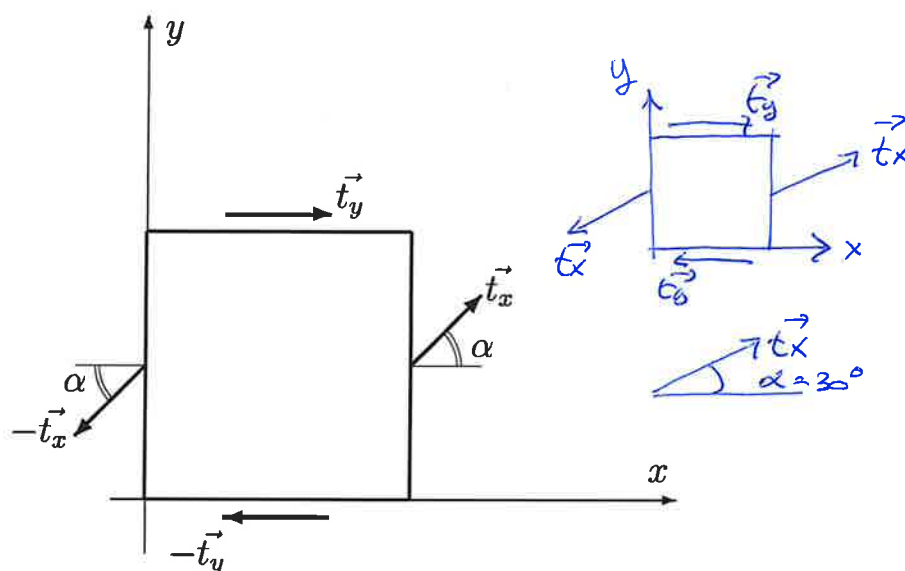
$$\begin{aligned}
 H_A(\Rightarrow) &= 0; & V_A(\uparrow) &= -2/3 qb; & H_C(\Rightarrow) &= 0; & V_C(\uparrow) &= 2/3 qb; \\
 N_{AB} &= //; & T_{AB} &= -2/3 qb; & M_{AB} &= -2/3 qb z_1; \\
 N_{BC} &= //; & T_{BC} &= -2/3 qb; & M_{BC} &= -4/3 qb^2 - 2/3 qb z_2; \\
 \text{c.c in A} &= v_1(z_1=0) = 0; & \text{c.c in B} &= v_1(z_1=2b) = v_2(z_2=0); & v_1'(z_1=2b) &= v_2'(z_2=0); \\
 & & \text{c.c in C} &= v_2(z_2=4b) = 0; \\
 v_1(z_1) &= \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{3} qb z_1^3 - 4 qb^3 z_1 \right); & v_1'(z_1) &= \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{3} qb z_1^2 - 4 qb^3 \right); \\
 v_2(z_2) &= \frac{1}{EI} \left(\frac{2}{3} qb^2 z_2^2 + \frac{1}{3} qb z_2^3 - \frac{8}{3} qb^3 z_2 - \frac{64}{3} qb^4 \right); & v_2'(z_2) &= \frac{1}{EI} \left(\frac{4}{3} qb^2 z_2 + \frac{1}{3} qb z_2^2 - \frac{8}{3} qb^3 \right); \\
 v_B &= -64 qb^4 / 9 EI \quad (\uparrow); & \varphi_C &= 8 qb^3 / EI \quad (\pi);
 \end{aligned}$$

Esercizio n. 3 (9 punti)

Un elemento di materiale *in condizioni di equilibrio* è soggetto lungo le facce aventi come normali gli assi x e y ai vettori sforzo (piani) \vec{t}_x e \vec{t}_y rispettivamente; di questi \vec{t}_x è inclinato rispetto all'asse x di un angolo $\alpha = 30^\circ$ (sicché: $\sin \alpha = \frac{1}{2}$; $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$) e ha modulo di valore $|\vec{t}_x| = 30$ MPa. L'altro vettore sforzo, \vec{t}_y , è invece *orizzontale* (ma di verso non specificato!), come indicato in Figura.

Si chiede di determinare le componenti σ_x , σ_y e τ_{xy} del tensore degli sforzi, costruire il cerchio di Mohr, determinare gli sforzi principali, σ_1 e σ_2 , e la massima tensione tangenziale, τ_{\max} .

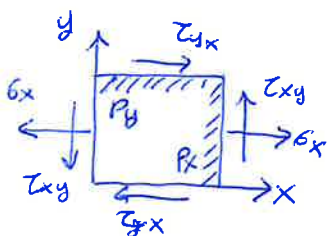
Determinare inoltre quanto vale l'angolo φ formato dall'asse x e dall'asse normale alla faccia sulla quale agisce lo sforzo principale massimo, σ_1 .



$$\sigma_x = 25,881 \text{ (MPa)}; \sigma_y = 0,000 \text{ (MPa)}; \tau_{xy} = 15,000 \text{ (MPa)};$$

$$\sigma_1 = 32,833 \text{ (MPa)}; \sigma_2 = -6,853 \text{ (MPa)}; \tau_{\max} = 19,843 \text{ (MPa)};$$

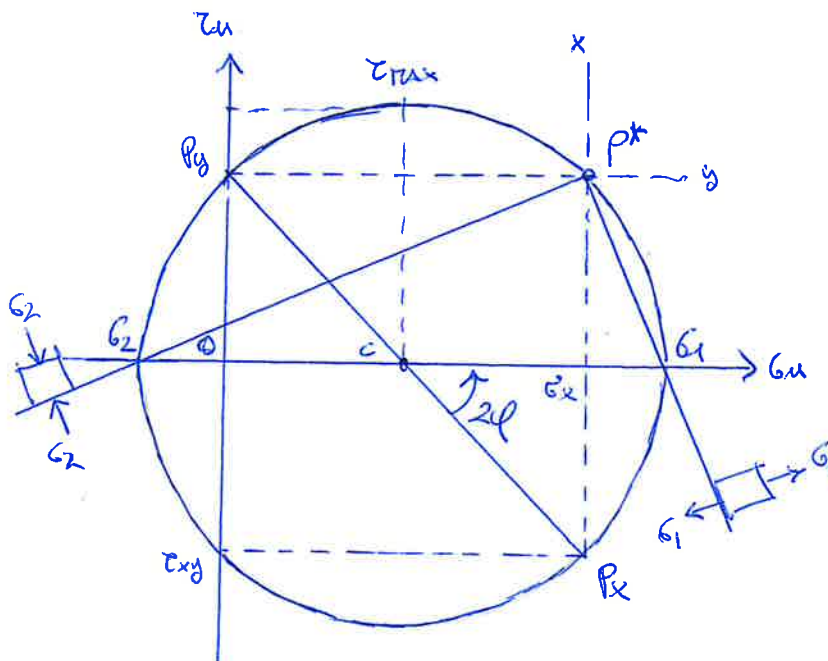
cerchio di Mohr:

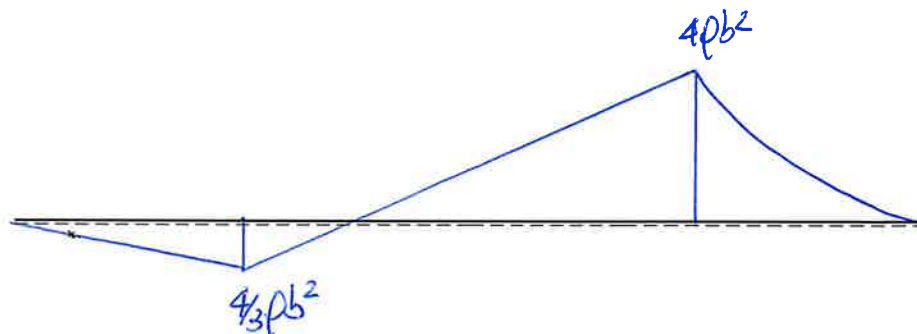
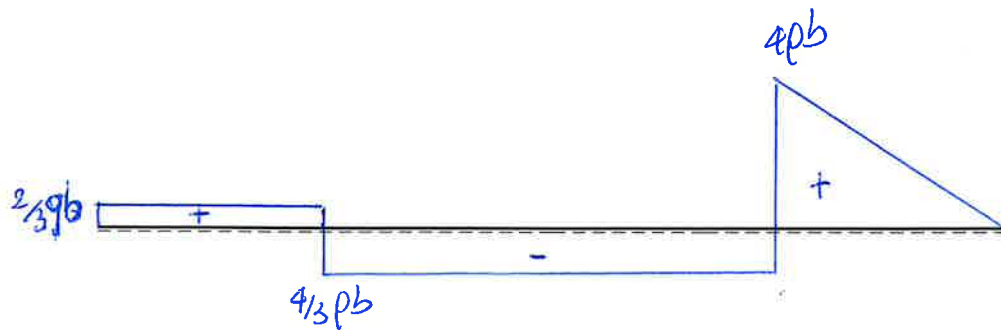
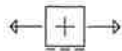
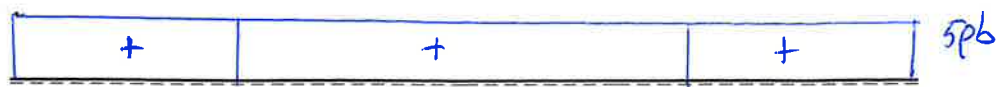


$$P_x = (25,881; -15,000)$$

$$P_y = (0,000; 15,000)$$

$$\varphi = 24,55 \text{ (}^\circ\text{)};$$





$H_A(\Rightarrow) = -5qb$	$V_A(\uparrow) = \frac{2}{3}qb$	$V_B(\uparrow) = -2qb$	$V_C(\uparrow) = \frac{16}{3}qb$
$N_{AB} = 5pb$	$T_{AB} = \frac{2}{3}pb$	$M_{AB} = \frac{2}{3}pb \times 1$	
$N_{BC} = 5pb$	$T_{BC} = -\frac{4}{3}pb$	$M_{BC} = \frac{4}{3}pb^2 - \frac{4}{3}pb \times 2$	
$N_{DC} = 5pb$	$T_{DC} = \frac{29}{3}qb$	$M_{DC} = -9 \times \frac{2}{3}$	
$v_D = -\frac{116qb^4}{9ED}$	(↓)		

CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2024-2025

Prova scritta in aula del 25.06.2025

Parte II - Testo 2

Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti.

Allievo:.....e-mail:..... Matricola:.....

Esercizio n. 1 (17 punti)

Risolvere mediante il Principio dei Lavori Virtuali (PLV) la struttura iperstatica riportata in Figura, assumendo, come incognita iperstatica, la reazione dell'appoggio in C, V_C .

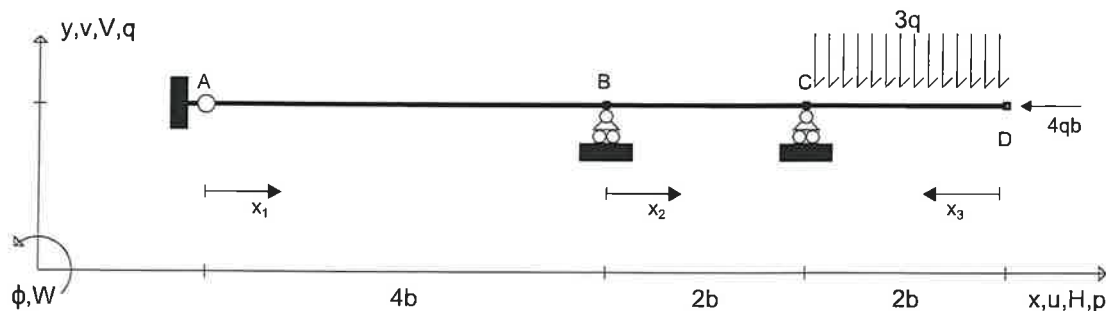
Dopo avere determinato l'iperstatica *tenendo conto solo della deformabilità flessionale*, calcolare le reazioni vincolari, le azioni interne e tracciare nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici.

Calcolare infine, riapplicando il PLV, la componente di spostamento verticale del punto D, v_D .

Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.

Universita' di Cagliari

SdC_SdA 2 25.06.25*002



EQUAZIONE DI CONQUENZA : $v_c(x, q) = 0$

Esercizio n. 2 (7 punti)

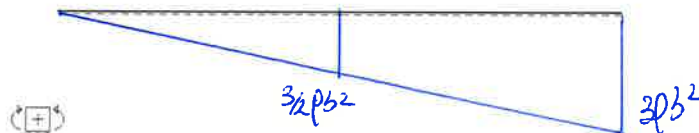
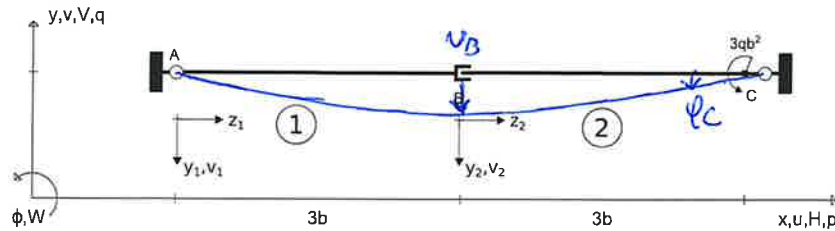
Per la struttura *isostatica*, indicata in Figura, determinare le reazioni vincolari e l'espressione delle azioni interne, nonché le condizioni al contorno imposte dai vincoli nei punti A, B e C.

Utilizzare quindi l'equazione della linea elastica per determinare:

1. La deformata della linea d'asse, $v(z) = v_1(z_1) \cup v_2(z_2)$;
2. La sua derivata prima, $v'(z) = v_1'(z_1) \cup v_2'(z_2)$;
3. La rotazione del punto C, φ_C ;
4. Lo spostamento verticale del punto B, v_B .

Universita' di Cagliari

SdC_SdA_2 26.06.25*002



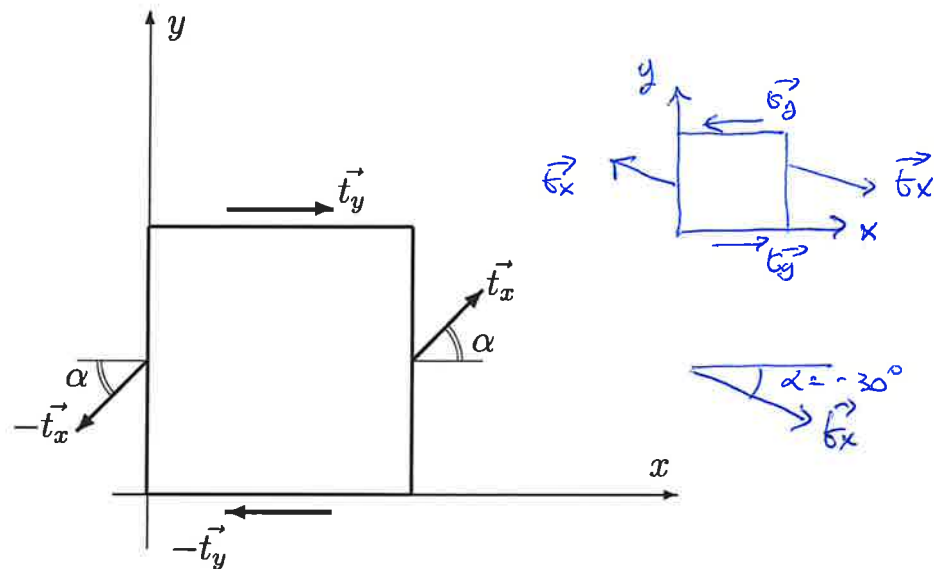
$$\begin{aligned}
 H_A (\Rightarrow) &= 0; & V_A (\Uparrow) &= \frac{1}{2}pb; & H_C (\Rightarrow) &= 0; & V_C (\Uparrow) &= -\frac{1}{2}pb; \\
 N_{AB} &= //; & T_{AB} &= \frac{1}{2}pb; & M_{AB} &= \frac{1}{2}pbz_1; \\
 N_{BC} &= //; & T_{BC} &= \frac{1}{2}pb; & M_{BC} &= \frac{3}{2}pb^2 + \frac{1}{2}pbz_2; \\
 \text{c.c in A} &= v_1(z_1=0)=0; & \text{c.c in B} &= v_1(z_1=3b)=v_2(z_2=0); & v_1'(z_1=3b) &= v_2'(z_2=3b); \\
 & & \text{c.c in C} &= v_2(z_2=3b)=0; \\
 v_1(z_1) &= \frac{1}{6}p(-\frac{1}{2}pbz_1^3 + 3pb^2z_1); & v_1'(z_1) &= \frac{1}{2}p(-\frac{1}{4}pbz_1^2 + 3pb^2); \\
 v_2(z_2) &= \frac{1}{6}p(-\frac{3}{4}pb^2z_2^2 - \frac{1}{2}pbz_2^3 + \frac{3}{4}pb^2z_2 + \frac{27}{4}pb^3); & v_2'(z_2) &= \frac{1}{2}p(-\frac{3}{2}pbz_2 - \frac{1}{4}pbz_2^2 + \frac{3}{4}pb^2); \\
 v_B &= \frac{27pb^4}{4} \quad (\downarrow); & \varphi_C &= -\frac{6pb^3}{2} \quad (\swarrow);
 \end{aligned}$$

Esercizio n. 3 (9 punti)

Un elemento di materiale *in condizioni di equilibrio* è soggetto lungo le facce aventi come normali gli assi x e y ai vettori sforzo (piani) \vec{t}_x e \vec{t}_y rispettivamente; di questi \vec{t}_x è inclinato rispetto all'asse x di un angolo $\alpha = -30^\circ$ (sicché: $\sin \alpha = -\frac{1}{2}$; $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$) e ha modulo di valore $|\vec{t}_x| = 20$ MPa. L'altro vettore sforzo, \vec{t}_y , è invece *orizzontale* (ma di verso non specificato!), come indicato in Figura.

Si chiede di determinare le componenti σ_x , σ_y e τ_{xy} del tensore degli sforzi, costruire il cerchio di Mohr, determinare gli sforzi principali, σ_1 e σ_2 , e la massima tensione tangenziale, τ_{\max} .

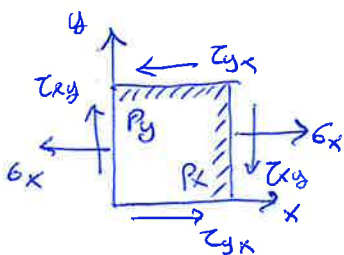
Determinare inoltre quanto vale l'angolo φ formato dall'asse x e dall'asse normale alla faccia sulla quale agisce lo sforzo principale massimo, σ_1 .



$\sigma_x = 17,320$ (MPa); $\sigma_y = 0,000$ (MPa); $\tau_{xy} = -10,000$ (MPa);

$\sigma_1 = 21,888$ (MPa); $\sigma_2 = -4,568$ (MPa); $\tau_{\max} = 13,228$ (MPa);

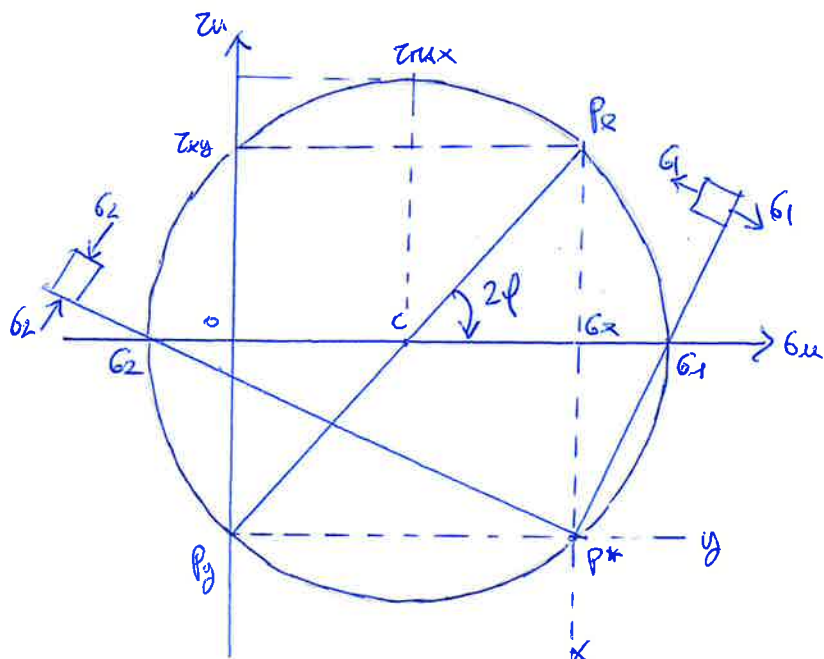
cerchio di Mohr:

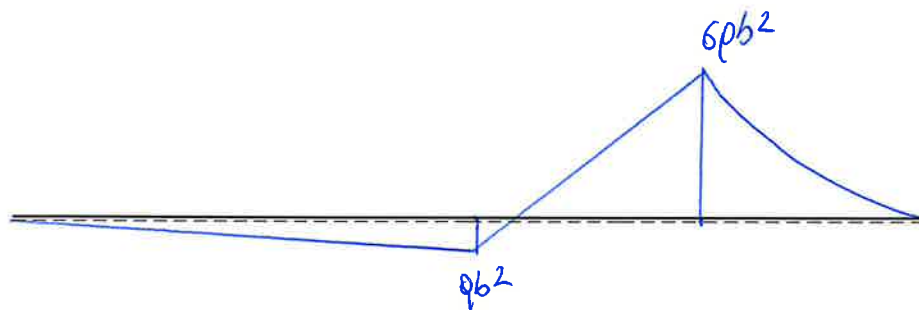
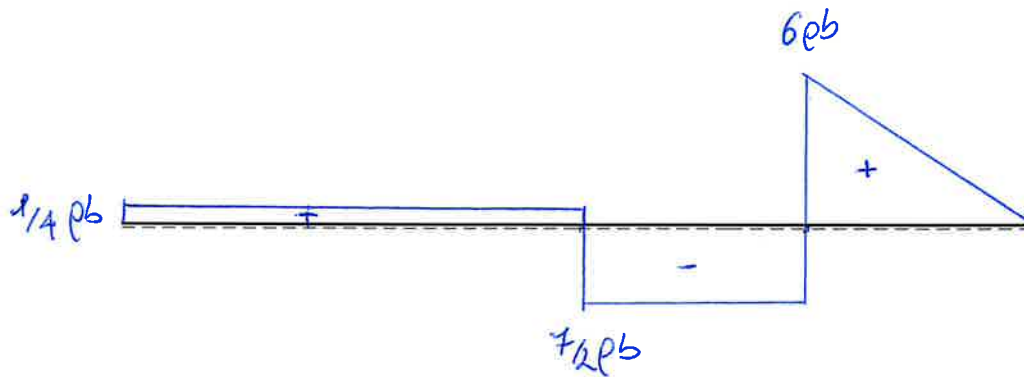
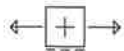
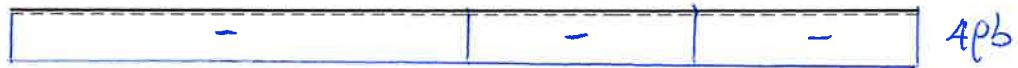


$P_x = (17,320; +10,000)$

$P_y = (0,000; -10,000)$

$\varphi = -24,55$ (°);





$H_A(\Rightarrow) = 4pb$	$V_A(\uparrow) = 1/4 pb$	$V_B(\uparrow) = -15/4 pb$	$V_C(\uparrow) = 13/2 pb$
$N_{AB} = -4pb$	$T_{AB} = 1/4 pb$	$M_{AB} = 1/4 pb x_1$	
$N_{BC} = -4pb$	$T_{BC} = -7/2 pb$	$M_{BC} = qb^2 - 7/2 pb x_2$	
$N_{DC} = -4pb$	$T_{DC} = 3q x_3$	$M_{DC} = -3/2 q x_3^2$	
$v_D = -40 qb^4 / 3ED \quad (\downarrow)$			

CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2024-2025

Prova scritta in aula del 25.06.2025

Parte II - Testo 3

Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti.

Allievo:.....e-mail:..... Matricola:.....

Esercizio n. 1 (17 punti)

Risolvere mediante il Principio dei Lavori Virtuali (PLV) la struttura iperstatica riportata in Figura, assumendo, come incognita iperstatica, la reazione dell'appoggio in C, V_C .

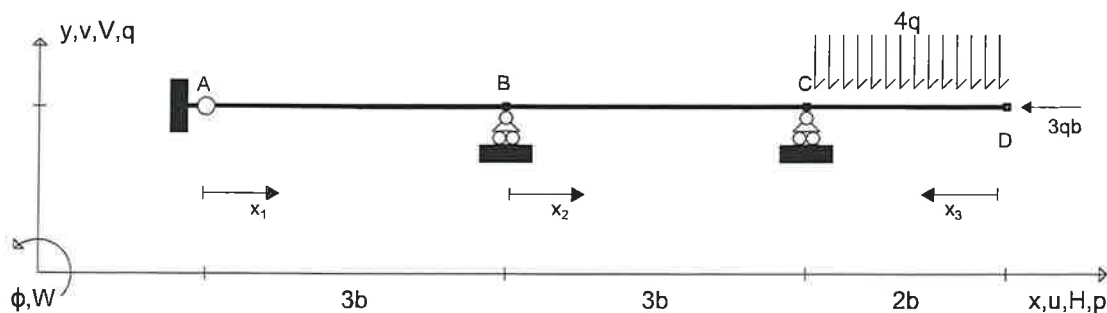
Dopo avere determinato l'iperstatica *tenendo conto solo della deformabilità flessionale*, calcolare le reazioni vincolari, le azioni interne e tracciare nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici.

Calcolare infine, riapplicando il PLV, la componente di spostamento verticale del punto D, v_D .

Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.

Universita' di Cagliari

SdC_SdA 2 25.06.25*003



EQUAZIONE DI GINGENZA: $v_C(x, q) = 0$

Esercizio n. 2 (7 punti)

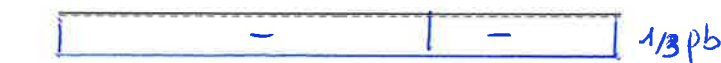
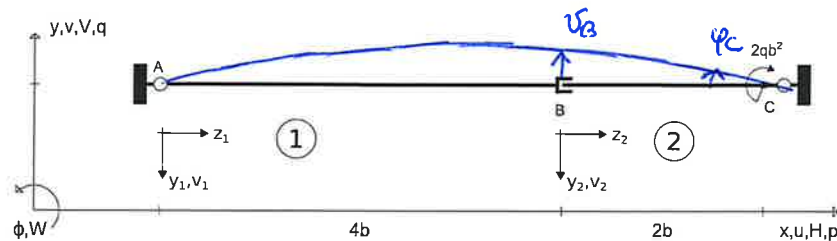
Per la struttura *isostatica*, indicata in Figura, determinare le reazioni vincolari e l'espressione delle azioni interne, nonché le condizioni al contorno imposte dai vincoli nei punti A , B e C .

Utilizzare quindi l'equazione della linea elastica per determinare:

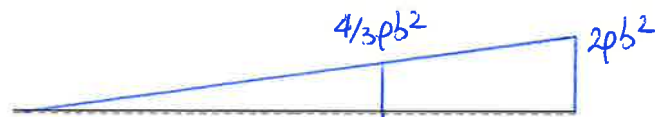
1. La deformata della linea d'asse, $v(z) = v_1(z_1) \cup v_2(z_2)$;
2. La sua derivata prima, $v'(z) = v_1'(z_1) \cup v_2'(z_2)$;
3. La rotazione del punto C , φ_C ;
4. Lo spostamento verticale del punto B , v_B .

Universita' di Cagliari

SdC_SdA_2 26.06.25*003



$\uparrow (+) \downarrow$



$\curvearrowright (+) \curvearrowleft$

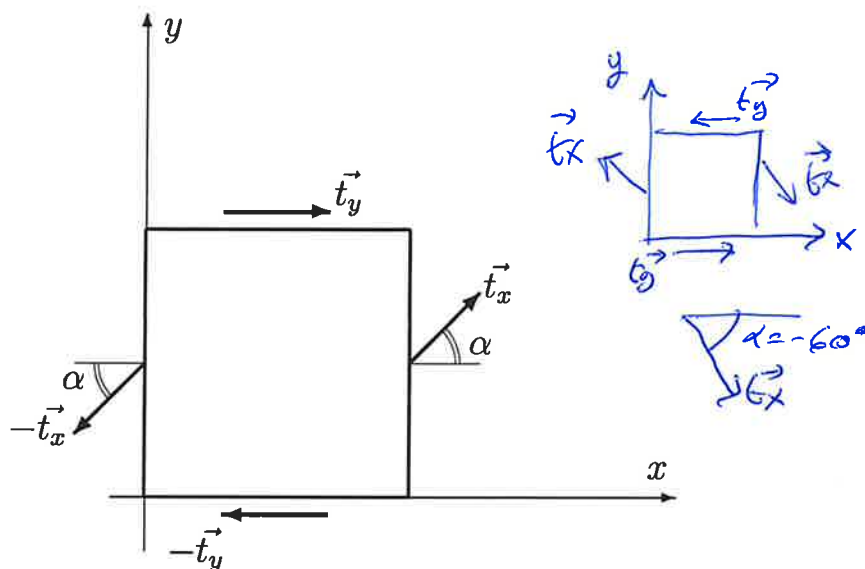
$$\begin{aligned}
 H_A(\Rightarrow) &= 0; & V_A(\uparrow) &= -\frac{1}{3}qb; & H_C(\Rightarrow) &= 0; & V_C(\uparrow) &= \frac{1}{3}qb; \\
 N_{AB} &= //; & T_{AB} &= -\frac{1}{3}qb; & M_{AB} &= -\frac{1}{3}qbz_1; \\
 N_{BC} &= //; & T_{BC} &= -\frac{1}{3}qb; & M_{BC} &= -\frac{4}{3}qb^2 - \frac{1}{3}qbz_2; \\
 \text{c.c in A} &= v_1(z_1=0)=0; & \text{c.c in B} &= v_1(z_1=4b)=v_2(z_2=0); & v_1'(z_1=4b) &= v_2'(z_2=0); \\
 & & \text{c.c in C} &= v_2(z_2=2b)=0; \\
 v_1(z_1) &= \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{48}qbz_1^3 - \frac{2}{3}qb^2z_1 \right); & v_1'(z_1) &= \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{16}qbz_1^2 - 2qb^2 \right); \\
 v_2(z_2) &= \frac{1}{EI} \left(\frac{2}{3}qb^2z_2^2 + \frac{1}{48}qbz_2^3 + \frac{2}{3}qb^2z_2 - \frac{40}{3}qb^4 \right); & v_2'(z_2) &= \frac{1}{EI} \left(\frac{4}{3}qb^2z_2 + \frac{1}{16}qbz_2^2 + \frac{2}{3}qb^2 \right); \\
 v_B &= -\frac{40qb^4}{3EI} \quad (\uparrow); & \varphi_C &= \frac{4qb^3}{EI} \quad (\uparrow);
 \end{aligned}$$

Esercizio n. 3 (9 punti)

Un elemento di materiale *in condizioni di equilibrio* è soggetto lungo le facce aventi come normali gli assi x e y ai vettori sforzo (piani) \vec{t}_x e \vec{t}_y rispettivamente; di questi \vec{t}_x è inclinato rispetto all'asse x di un angolo $\alpha = -60^\circ$ (sicché: $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos \alpha = \frac{1}{2}$) e ha modulo di valore $|\vec{t}_x| = 25$ MPa. L'altro vettore sforzo, \vec{t}_y , è invece *orizzontale* (ma di verso non specificato!), come indicato in Figura.

Si chiede di determinare le componenti σ_x , σ_y e τ_{xy} del tensore degli sforzi, costruire il cerchio di Mohr, determinare gli sforzi principali, σ_1 e σ_2 , e la massima tensione tangenziale, τ_{\max} .

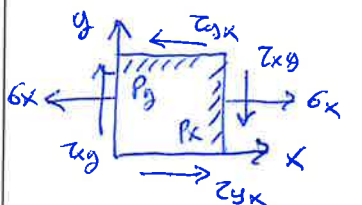
Determinare inoltre quanto vale l'angolo φ formato dall'asse x e dall'asse normale alla faccia sulla quale agisce lo sforzo principale massimo, σ_1 .



$$\sigma_x = 12,500 \text{ (MPa)}; \sigma_y = 0,000 \text{ (MPa)}; \tau_{xy} = -21,651 \text{ (MPa)};$$

$$\sigma_1 = 21,784 \text{ (MPa)}; \sigma_2 = -16,284 \text{ (MPa)}; \tau_{\max} = 22,534 \text{ (MPa)};$$

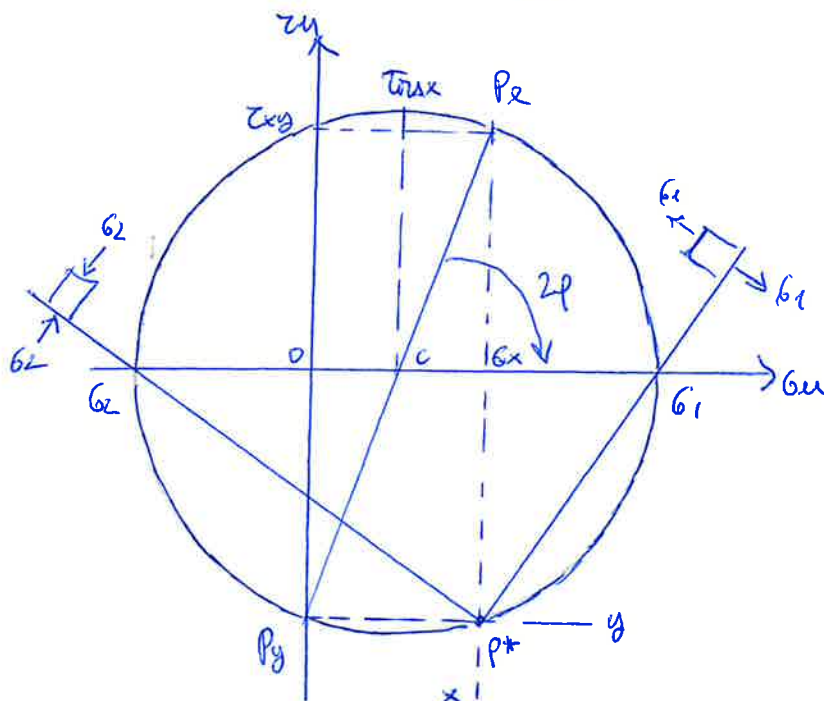
cerchio di Mohr:

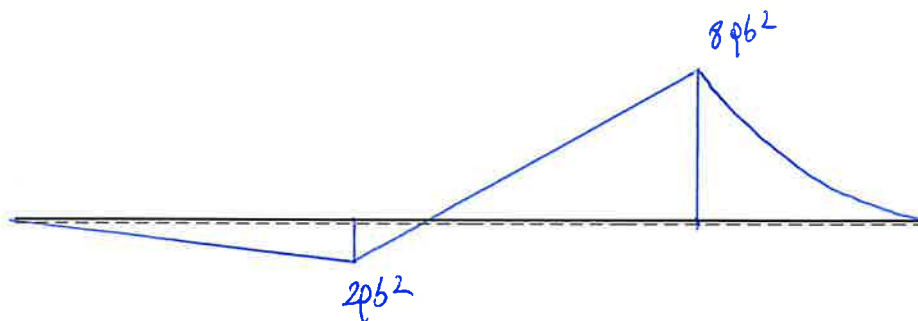
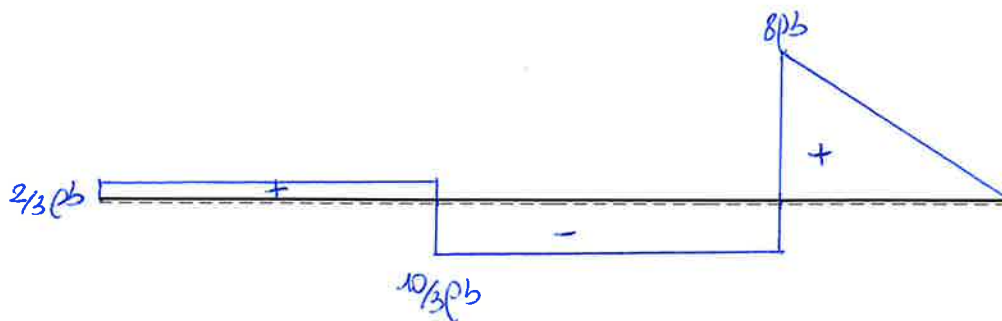
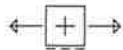


$$P_x = (12,500; 21,651)$$

$$P_y = (0,000; -21,651)$$

$$\varphi = -36,95 \text{ (}^\circ\text{)};$$





$H_A(\Rightarrow) = 3pb$	$V_A(\uparrow) = \frac{2}{3}pb$	$V_B(\uparrow) = -4pb$	$V_C(\uparrow) = \frac{34}{3}pb$
$N_{AB} = -3pb$	$T_{AB} = \frac{2}{3}pb$	$M_{AB} = \frac{2}{3}pb \times 1$	
$N_{BC} = -3pb$	$T_{BC} = -\frac{10}{3}pb$	$M_{BC} = 2pb^2 - \frac{10}{3}pb \times 2$	
$N_{DC} = -3pb$	$T_{DC} = 4p \times 3$	$M_{DC} = -2p \times 3^2$	
$V_D = -22pb^4/\epsilon D \quad (\downarrow)$			